発展方程式論へのBesov空間の応用(非線形発展方程式と偏微分方程式)

村松, 寿延

数理解析研究所講究録
647巻 1988年 99-124

発展方程式論へのBesov空間の応用

筑波大学数学系　村松寿延
(Tosinobu MURAMATU)

Besov空間は定義がやや複雑なので偏微分方程式論で使用されることが少なかったが，放物型発展方程式の研究でかなり有効に使えることを示そう．非線型方程式を調べる場合に，線型方程式について係数の滑らかさに関する精密な結果が要求されるのであるが，滑らかさを測るにはBesov空間を(Sobolev空間より)便利である．

§1．Besov空間の定義と性質

まず，Besov空間の定義とその重要な性質を述べる．

R^nの開集合Ω，$1 \leqq p, q \leqq \infty$，実数$\sigma$，Banach空間X に対して，Besov空間$B^{\sigma}_{p,q}(\Omega;X)$を次のように定義する:

$0<\sigma<1$の場合．この空間を$L_p(\Omega;X)$に属する函数fであって，yの函数

(1) $$|y|^{-\sigma}\|f(x+y)-f(x)\|_{L_p(\Omega\cap(\Omega-y);X)}$$

が$L_q^*(R^n)$に属するものの全体と定義し，そのノルムをfのL_pノルムと（1）の函数のL_q^*ノルムの和と定義する．ただし，L_q^*は測度$dy/|y|^n$に関するL_qを示す．

$\sigma=1$のときは（1）において

$f(x+y)-f(x)$を$f(x+2y)-2f(x+y)+f(x)$に，

$\Omega\cap(\Omega-y)$を$\Omega\cap(\Omega-y)\cap(\Omega-2y)$に

換えて，σを1として定義する．

一般のσの場合を定義するのには，まず，$\sigma=k+\theta$，kは整数，$0<\theta\leqq1$と表わす．

kが正整数のとき．Sobolev空間$W_p^k(\Omega;X)$，すなわちk階まで導函数が$L_p(\Omega;X)$に属する函数の空間，に属し，k階のすべての導函数が$B_{p,q}^{\theta}(\Omega;X)$に属する函数の全体と定義し，そのノルムを

$$(2)\qquad \|f\|_{B_{p,q}^{\sigma}(I;X)}=\|f\|_{W_p^k(\Omega;X)}+\sum_{|\alpha|=k}\|\partial^{\alpha}f\|_{B_{p,q}^{\theta}(\Omega;X)}$$

と定義する．

kが負整数のときは，

$$(3)\qquad f=\sum_{|\alpha|\leqq|k|}\partial^{\alpha}f_{\alpha},\qquad f_{\alpha}\in B_{p,q}^{\theta}(\Omega;X),$$

と表現できる超函数fの全体で，ノルムを

$$(4)\qquad \|f\|_{B_{p,q}^{\sigma}(\Omega;X)}=\inf\sum_{|\alpha|=|k|}\|f_{\alpha}\|_{B_{p,q}^{\theta}(\Omega;X)}$$

と定義する．下限はfのあらゆる表現（3）についてとる．

添字の大小とBesov空間の包含関係およびBesov空間とSobolev空間との関係；

$q_1 \leqq q_2$ ならば $B^{\sigma}_{p,q_1} \subset B^{\sigma}_{p,q_2}$，$\sigma > \tau$ ならば $B^{\sigma}_{p,q} \subset B^{\tau}_{p,1}$，

m を整数とするとき，$B^{m}_{p,1} \subset W^{m}_{p} \subset B^{m}_{p,\infty}$．

特に，$0 < \theta < 1$ のとき，C^{θ} で θ 次のHölder連続函数の空間を表わし，C^0 で一様連続函数の空間を示すと，

$$C^{\theta} = B^{\theta}_{\infty,\infty} \subset B^{0}_{\infty,1} \subset C^{0} \subset B^{0}_{\infty,\infty} \quad \text{(等号は成立しない)}.$$

1変数の場合についてBesov空間の特徴付けおよび積分表示を述べておく（少し複雑になるがn変数でも同様なことが成立する）．$I=(a,b)$ とする．

f が $B^{\sigma}_{p,q}(I;X)$ に属するためには m を σ より大きい正整数とするとき2条件；

(i) 任意の $\phi \in \mathcal{K}_0(I)$ について

(5) $$\int \phi(x,x-y)f(y)dy \in L_p(I;X),$$

(ii) 任意の $\phi \in \mathcal{K}_m(I)$ について

(6) $$t^{-\sigma}\int \frac{1}{t}\phi\left(x,\frac{x-y}{t}\right)f(y)dy \in L_q{}^*([0,c];L_p(I;X))$$

が成立することである．ここで，$C^{\infty}(R^2)$ に属する函数 ϕ で，I の点 x を止めたときの y の函数 $\phi(x,y)$ の台が一定の区間 $[-\gamma,\gamma]$ に含まれ，その台に属する任意の y と $0<t \leqq 1$ について $x-ty \in I$ が成立するものの全体を $\mathcal{K}_0(I)$ で表わし，

$\mathcal{K}_0(I)$ に属する函数の y についての m 階導函数の有限和と表現できる函数の全体を $\mathcal{K}_m(I)$ で示す．

また，このとき，f は

(7) $f(x)$

$$= \sum_{j=1}^{\ell}\int_0^1 \frac{dt}{t}\int \frac{1}{t}M_j(x,\frac{x-y}{t})u_j(t,y)dy + \int \phi(x,x-y)g(y)dy ,$$

$$t^{-\sigma}u_j(t,x) \in L_q{}^*([0,1];L_p(I;X)) , j=1,\cdots,\ell,$$

$$g \in L_p(I;X) ,$$

と積分表示できる．M_j は $\mathcal{K}_m(I)$ に，ϕ は $\mathcal{K}_0(I)$ に属し，区間 I によってきまる函数である．

詳細は，Muramatu [1], p. 340-360, を見られたい．

ここで，§5 で用いる概念“パラメーターに関して一様に Besov 空間に属すること”を定義して置く．

定義1．$\lambda \in \Lambda$ をパラメーターとする函数 $f(x,\lambda)$ が λ について一様に $L_p(\Omega)$ に属するとは，$\sup\{\|f(x,\lambda)\|_X;\lambda\in\Lambda\}$ が $L_p(\Omega)$ に属することをいい，λ について一様に $W_p{}^k$ (k：正整数) に属するとは k 階までの導函数が λ について一様に L_p に属することをいう．

λ について一様に $B_{p,q}^{\sigma}$ に属するとは $0<\sigma<1$ のときは λ について一様に L_p に属して，

$$\|\{\sup_{\lambda\in\Lambda}|y|^{-\sigma}\|f(x+y,\lambda)-f(x,\lambda)\|_X\}\|_{L_p(\Omega\cap(\Omega-y))} \in L_q{}^*((0,\ c))$$

が成立することである．$\sigma = 1$ のときも同様に定義する．

$\sigma = k+\theta$，k は正整数，$0<\theta\leqq 1$，のときは λ について一様に W_p^k に属し，k 階導函数が λ について一様に $B_{p,q}$ に属することを意味し，$\sigma \leqq 0$ のときは（3）の様に表現する函数が λ について一様に Besov 空間に属することと定義する．

λ について一様に Besov 空間に属することは（4）や(5)の函数が λ について一様に L_p または $L_q{}^*((0, c);L_p)$ に属することで特徴付けできる．

§2．時間的に一様な線型放物型方程式．

以下の§では，特に断らない限り，x, y は Banach 空間の元を示す．実変数は t, s, r, τ などで表わすことにする．

e^{-tA} を Banach 空間 X における解析的半群，$-A$ をその生成作用素とすると，放物型方程式

(1) $$\frac{du}{dt} + Au(t) = f(t),\quad t>0,$$

(2) $$u(0) = u_0$$

の解は，

(3) $$u(t) = e^{-tA}u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A}f(s)ds$$

であるが，f が連続でも，この $u(t)$ は一般的には，強微分可能ではない（J.B.Baillon[1]）．$t > 0$ において，(3) の u が

強微分可能となるための極めて緩い条件をBesov空間を使って与えることができる．すなわち，

定理1．e^{-tA}をBanach空間Xにおける解析的半群，I = (0, T)，T > 0，とし，

$$(4) \qquad F(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s)\,ds$$

とおくと，f → F は $\overset{0}{B}_{\infty,1}(I;X)$ から $C^1(I;X) \cap C^0(I;\mathscr{D}(A))$ への連続作用素で，F は I において

$$(5) \qquad \frac{dF}{dt} = f(t) + AF(t)$$

を満たす．

この定理からすぐ次の結果を得る：

定理2． f が $\overset{0}{B}_{\infty,1}(I;X)_{loc} \cap L_1(I;X)$ に属するならば，(3) の u(t) は [0,T] で強連続で (2) を満たし，開区間 (0, T) において強連続的微分可能で，各点 t で $\mathscr{D}(A)$ に属し，(1) を満たす．

ただし，函数空間 $\mathscr{F}(\Omega;X)$ に対して，$\mathscr{F}(\Omega;X)_{loc}$ は任意の $\phi \in C^\infty(\Omega)$ について $\phi f \in \mathscr{F}(\Omega;X)$ となる f の全体を示す．

証明．$0 < t_0 < T$ とする．正数 δ を $0 < t_0 - 3\delta < t_0 + 3\delta < T$ となるようにとり，台が $[t_0-3\delta, t_0+3\delta]$ に含まれ，$[t_0-2\delta, t_0+2\delta]$ で 1 となる C^∞ 函数を ϕ とし，

$$F_1(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A}\phi(s)f(s)ds,$$

$$F_2(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A}\{1-\phi(s)\}f(s)ds,$$

とおくと，ϕf が $\overset{0}{B}_{\infty,1}(I;X)$ に属するから定理１により F_1 は I において強連続的微分可能で，各点 t で $\mathcal{D}(A)$ に属し，導函数は $\phi f+AF_1$ に等しい．また，t が $[t_0-\delta, t_0+\delta]$ に属するとき $F_2(t)$ は０から $t_0-2\delta$ までの積分で表示され被積分関数はこの区間で強連続的微分可能でしかも $\mathcal{D}(A)$ 値連続であるから，F_2 はこの区間で強微分可能で $\mathcal{D}(A)$ 値連続になり，導函数は $AF_2(t)$ に等しい．従って，$u(t)$ についての定理の結論がわかる．　証明終．

参考：$f \in B^{\sigma}_{p,q}((-\infty, T);X)\cap L_1((0, T);X)$ で，f の台が区間 $[0, T]$ に含まれるならば，（4）の F は $B^{\sigma+1}_{p,q}((-\infty, T);X)$ に属する．（ただし，$t<0$ で $F(t)=0$ とする）．従って，定理２の条件のもとで（3）の u は $\overset{0}{B}_{\infty,1}(I;X)_{loc}$ に属する．

なお，Crandall-Pazy[1] は局所的に，

(6) $\quad \sup\{\|f(s+h)-f(s)\|_X; 0\leqq s\leqq T-h\} \in L_1^*((0,\delta_0))$

を仮定して解の強微分可能性を示しているが，定理２の条件はこれよりも弱い．

例. Crandall-Pazy[1] の条件（6）は満たさないが $\overset{0}{B}_{\infty,1}$

に属する函数の１例は

$$f(t)=\begin{cases} 1/\log t\ , & t>0 \text{ のとき,} \\ 0 & t=0 \text{ のとき,} \\ -1/\log|t|, & t<0 \text{ のとき.} \end{cases}$$

§３．生成作用素の定義域が一定の場合の発展作用素．

線型放物型発展方程式については多くの研究があるが，表記の場合に関するH.Tanabe[1]の結果を，少々改良し，

定理３． $\{A(t)\}_{a\leq t\leq b}$ に対する発展作用素 $\{U(t,s)\}_{a\leq s\leq t\leq b}$ を次の３条件が成立するとき構成できる：

(i) 実数 β，γ，$0<\omega<\pi/2$ と正数Mがあって，角領域 $|\arg(\lambda-\gamma)|\leq\omega+\pi/2$ に属する複素数 λ は $-A(t)$ ($a\leq t\leq b$)のレゾルベント集合に属し，

(1) $$\|(\lambda+A(t)^{-1}\|_{\mathfrak{L}(X)}\leq M/|\lambda-\beta|$$

がこの範囲のすべての λ と t について成立する．

(ii) $\mathfrak{D}(A(t))$ は $a\leq t\leq b$ によらず一定である．

(iii) 適当な実数 λ_0 と $a\leq t_0\leq b$ について

(2) $$\int_0 \sup_{a\leq s\leq b-h}\{\|\{A(s+h)-A(s)\}(\lambda_0+A(t_0))^{-1}\|_{\mathfrak{L}(X)}\frac{dh}{h}<\infty.$$

Tanabe[1]では(2)の代わりに，(2)の被積分函数が $C|h|^\theta$ で評価できること，すなわち，Hölder連続性を仮定し

ているが，その証明を少し改良すれば上の定理を得る．

定理３の証明概要．$\{U(t,s)\}$ を $\{A(t)\}$ に対する発展作用素とすれば $\{e^{-\beta(t-s)}U(t,s)\}$ は $\{A(t)+\beta\}$ に対する発展作用素になるから，$\beta=\gamma=\lambda_0=0$ の場合について証明すればよい．以下この場合を考える．

$n=1, 2, \cdots,$ について $A_n(t)=A(t)(1+n^{-1}A(t))^{-1}$ と吉田近似をと定義し，積分方程式

$$U_n(t,r)=I-\int_r^t A_n(t)U_n(s,r)ds \qquad (a\leqq r\leqq t\leqq b)$$

の解として $\{U_n(t,s)\}_{a\leq s\leq t\leq b}$ を構成する．$A_n(t)$ がノルム連続であるから解が存在することおよびそれが $\{A_n(t)\}$ に対する発展作用素であることが分かる．

そこで，$U_n(t,s)e^{-(s-r)A_n(r)}$ を s に関して微分し積分すると

$$(3) \qquad U_n(t,r)=e^{-(t-r)A_n(r)}+\int_r^t U_n(t,s)K_n(s,r)ds$$

を得る．ただし，

$$(4) \qquad K_n(t,s)=\{A_n(t)-A_n(s)\}A_n(s)^{-1}A_n(s)e^{-(t-s)A_n(s)}$$

である．そして，これに対応して，積分方程式

$$(5) \qquad U(t,r)=e^{-(t-r)A(r)}+\int_r^t U(t,s)K(s,r)ds$$

を考える，ただし，

(6) $$K(t,s) = \{A(t)-A(s)\}\, A(s)^{-1}A(s)e^{-(t-s)A(s)}$$

である．定理の仮定から$A(t)A(s)^{-1}$ はノルム連続で，ノルムが一様有界で，

(7) $$\|A(t)A(s)^{-1}-1\|_{\mathscr{L}(X)} \leqq \rho(|t-s|),$$

(8) $$\int_0 \rho(t)t^{-1}dt < \infty$$

が成立する． K と K_n の定義と解析的半群の性質により，

$$\|K(t,s)\|_{\mathscr{L}(X)} \leqq \frac{M_1\rho(|t-s|)}{|t-s|},\ \|K_n(t,s)\|_{\mathscr{L}(X)} \leqq \frac{M_1\rho(|t-s|)}{|t-s|},$$

$(n=1, 2, \cdots)$ である．故に，区間$[a, b]$に含まれる長さが十分小の区間$[a_1, b_1]$においては（5）の$\mathscr{L}(X)$値強連続な解$U(t,s)$が一意的に存在する．吉田近似の性質により，$n \to \infty$のとき

$$e^{-tA_n(s)} \to e^{-tA(s)},\quad A_n(s)e^{-tA_n(s)} \to A(s)e^{-tA(s)} \quad (強収束)$$

がそれぞれ $t \geqq 0$と$t > 0$で成立し，従って，

$$K_n(t,s) \to K(t,s) \qquad (強収束)$$

が$a \leqq s < t \leqq b$で成立することに注意すると，

$$U_n(t,s) \to U(t,s) \qquad (強収束)$$

が$a_1 \leqq s \leqq t \leqq b_1$で成立する．しかも

(9) $$U_n(t,s)U_n(s,r) = U_n(t,r)$$

が$a \leqq r \leqq s \leqq t \leqq b$で成り立つから$n \to \infty$として，

(10) $$U(t,s)U(s,r) = U(t,r)$$

が $a_1 \leqq r \leqq s \leqq t \leqq b_1$ で成立する．ただし，$[a_1, b_1]$ は $[a, b]$ に含まれる長さが小な任意の区間である．$t-s$ が大のときは

分点； $s<s_1<\cdots<s_m<t$

を十分多くとり，

$$U(t,s) = U(t,s_m)U(s_m,s_{m-1})\cdots U(s_1,s)$$

と定義する．任意の小区間で (10) が成り立つから，$U(t, s)$ は分点の選び方に依存しないことおよび区間 $[a, b]$ 全体で (10) が成立することが分かる．$U(t,s)$ の微分可能性は各小区間でいえばよいから Tanabe[1] または増田 [1] と同様にして証明できる．　証明終．

§4．線型放物型方程式の外力項の積分の微分可能性

時間的に一様な方程式に関する定理2と同様に，Besov 空間を使って非斉次方程式が強微分可能な解を持つための極めて緩い条件を得る．定理1に対応して，

定理4． $\{A(t)\}_{a \leq t \leq b}$ を定理3の条件を満たす生成作用素の系，$\{U(t,s)\}_{a \leq s \leq t \leq b}$ をそれに対する発展作用素とする．

このとき，f が $\overset{0}{B}_{\infty,1}((a,b);X)$ に属するならば，函数

$$F(t) = \int_a^t U(t,s)f(s)ds \tag{1}$$

は $C^1((a,b);X)$ に属し，各 $t \in (a, b)$ に対して，$F(t)$ は

$\mathcal{D}(A(t))$ に属し，函数 $A(t)F(t)$ は $C^0((a,b);X)$ に属する．しかも，$t \in (a, b)$ のとき

$$(2) \qquad \frac{d}{dt}F(t) = f(t) - A(t)F(t)$$

が成立し，

$$(3) \qquad \|F(t)\|_{C^1((a,b);X)} \leqq C\|f(t)\|_{\overset{0}{B}_{\infty,1}((a,b);X)}$$

が成り立つ．

この定理を証明するためには，まず

補題1． $\{A(t)\}_{a\leq t\leq b}$ が定理3の条件を満たす生成作用素の系で，f が $\overset{0}{B}_{\infty,1}((a,b);X)$ に属するならば，

$$(4) \qquad F(t) = \int_a^t e^{-(t-s)A(t)}f(s)ds$$

と定義すると，各 $t \in (a, b)$ に対して，$F(t)$ は $\mathcal{D}(A(t))$ に属し，函数 $F(t)$ と $A(t)F(t)$ は $C^0((a,b);X)$ に属し，

$$(5) \qquad \|A(t)F(t)\|_{C^0((a,b);X)} \leqq C\|f(t)\|_{\overset{0}{B}_{\infty,1}((a,b);X)}$$

が成り立つ．

特に，f が $C^1((a,b);X)$ に属すときは，

$$(6) \qquad A(t)F(t) = f(t) - e^{-(t-a)A(t)}f(a) - \int_a^t e^{-(t-s)A(t)}\frac{df}{ds}(s)ds$$

が成立する．

証明．まず，$f \in C^1((a,b);X)$ のときは正数 δ をとり，

$$F_\delta(t) = \int_a^{t-\delta} e^{-(t-s)A(t)} f(s)ds$$

と置くと，部分積分により，$A(t)F_\delta(t)$ は

$$e^{-\delta A(t)} f(t-\delta) - e^{-(t-a)A(t)} f(a) - \int_a^{t-\delta} e^{-(t-s)A(t)} \frac{df}{ds}(s)ds$$

に等しいことが分かる．右辺は $\delta \to 0$ で収束するから $A(t)$ が閉作用素であることに注意すると（6）を得る．

f が一般の $\overset{0}{B}_{\infty,1}$ の元の場合は Besov 空間の特徴付けと積分表示式により

$$(7) \qquad f(x) = \int_0^c \frac{d\tau}{\tau} \int \frac{1}{\tau}\phi(t, \frac{t-s}{\tau}) u(\tau, s)ds,$$

$$u \in L_1((0,c); \overset{*}{L}_\infty(I;X)), \ \phi \in \mathcal{R}_1(I).$$

の場合を考えれば十分である．

$$(8) \qquad f_\varepsilon(x) = \int_\varepsilon^c \frac{d\tau}{\tau} \int \frac{1}{\tau}\phi(t, \frac{t-s}{\tau}) u(\tau, s)ds,$$

$$(9) \qquad F_\varepsilon(t) = \int_a^t e^{-(t-s)A(t)} f_\varepsilon(s)ds,$$

と置く．$f_\varepsilon \in C^1(I;X)$ だから（6）により，$0<\varepsilon<\delta$ のとき

$$A(t)F_\varepsilon(t) - A(t)F_\delta(t) = \int_\varepsilon^\delta U(\tau, t)\frac{d\tau}{\tau},$$

$$(10) \quad U(\tau, t) = \int \{\frac{1}{\tau}\phi(t, \frac{t-r}{\tau}) - e^{-(t-a)A(t)}\phi(a, \frac{a-r}{\tau})$$

$$-\sum_{j=1,2}\int_a^t e^{-(t-s)A(t)}\tau^{-j}\phi_j(s,\frac{s-r}{\tau})ds\}u(\tau,r)dr,$$

ただし，$\phi_1(t,s)=\partial_t\phi(t,s)$, $\phi_2(t,s)=\partial_s\phi(t,s)$.

(a)　$0<\tau\leqq t-a$ のときは (10) よりすぐに

$$\|U(\tau,t)\|_X\leqq C'\|u(\tau,\cdot)\|_{L_\infty(I;X)}.$$

(b)　$\tau\geqq t-a$ のときは (10) より，

$$U(\tau,t)=U_1(\tau,t)+U_2(\tau,t),$$

$$U_1(\tau,t)=\int\{\frac{1}{\tau}\phi(t,\frac{t-r}{\tau})-e^{-(t-a)A(t)}\phi(a,\frac{a-r}{\tau})$$

$$-\sum_{j=1,2}\int_{t-\tau}^t e^{-(t-s)A(t)}\tau^{-j}\phi_j(s,\frac{s-r}{\tau})ds\}u(\tau,r)dr,$$

$$U_2(\tau,t)=-\sum_{j=1,2}\int\{\int_a^{t-\tau}e^{-(t-s)A(t)}\tau^{-j}\phi_j(s,\frac{s-r}{\tau})ds\}u(\tau,r)dr$$

$\phi(t,s)=\partial_s\psi(t,s)$ を満たす $\psi\in\mathscr{K}_0(I)$ があるから

$$\frac{\partial}{\partial s}\{\psi(s,\frac{s-r}{\tau})e^{-(t-s)A(t)}\}=\frac{1}{\tau}\phi(s,\frac{s-r}{\tau})e^{-(t-s)A(t)}$$

$$+\sum_{j=0,1}\psi_j(s,\frac{s-r}{\tau})A(t)^{1-j}e^{-(t-s)A(t)},$$

を得る，ただし，$\psi_1(t,s)=\partial_t\psi(t,s)$，$\psi_0=\psi$．部分積分し

$$-\sum_{j=1,2}\int_a^{t-\tau}e^{-(t-s)A(t)}\tau^{-j}\phi_j(s,\frac{s-r}{\tau})ds=e^{-(t-a)A(t)}\frac{1}{\tau}\phi(a,\frac{a-r}{\tau})$$

$$- e^{-\tau A(t)}\frac{1}{\tau}\phi(t-\tau,\frac{t-\tau-r}{\tau}) + \int_a^{t-\tau} A(t)e^{-(t-s)A(t)}\frac{1}{\tau}\phi(s,\frac{s-r}{\tau})ds$$

$$= - e^{-\tau A(t)}\frac{1}{\tau}\phi(t-\tau,\frac{t-\tau-r}{\tau}) + e^{-(t-a)A(t)}\frac{1}{\tau}\phi(a,\frac{a-r}{\tau})$$

$$+ \tau A(t)e^{-\tau A(t)}\frac{1}{\tau}\psi(t-\tau,\frac{t-\tau-r}{\tau}) - \tau A(t)e^{-(t-a)A(t)}\frac{1}{\tau}\phi(a,\frac{a-r}{\tau})$$

$$+\sum_{j=0,1}\tau\int_a^{t-\tau} A(t)^{2-j}e^{-(t-s)A(t)}\frac{1}{\tau}\psi_j(s,\frac{s-r}{\tau})ds$$

故に $\|U(\tau,t)\|_X \leqq C'\|u(\tau,t)\|_{L_\infty(I;X)}$ を得る．従って，

$$(11)\quad \|A(t)F_\varepsilon(t) - A(t)F_\delta(t)\|_X \leqq C'\int_\varepsilon^\delta \|u(\tau,t)\|_{L_\infty(I;X)}\frac{d\tau}{\tau}$$

となり右辺は $\varepsilon, \delta \to 0$ のとき 0 に収束する．故に，$\varepsilon \to 0$ のとき $A(t)F_\varepsilon(t)$ の極限 $G(t)$ が存在する．$A(t)$ は閉だから $F(t)$ は $\mathscr{D}(A(t))$ に属し，$A(t)F(t) = G(t)$．(11) で $\delta = c$ と置き，$\varepsilon \to 0$ とすると，

$$\|A(t)F(t)\|_X \leqq C'\int_0^c \|u(\tau,t)\|_X\frac{d\tau}{\tau} < \infty .$$

同様に，

$$(12)\quad \|A(t)F_\delta(t) - A(t)F(t)\|_X \leqq C'\int_0^\delta \|u(\tau,t)\|_X\frac{d\tau}{\tau} .$$

$A(t)F_\delta(t)$ は一様連続で，(12) の右辺は $\delta \to 0$ のとき 0 に収束するから，$A(t)F(t)$ も一様連続である．　証明終．

注意．この証明から (5) の定数 C は区間 I と定数

$$\sup_{t\ I}\ \sup_{0<s\leqq b-a} \|(sA(t))^j e^{-sA(t)}\|_{\mathscr{L}(X)},\ j=0,1,2,$$

のみに依存して決まることが分かる．

系．$I=(a,b)$ と $\{A(t)\}$，f，F は補題3と同じとし，$A_n(t)=A(t)(1+n^{-1}A(t))^{-1}$ と置き，(4) で f を f_n とし F_n を定義すると，

(13)
$$\|A_n(t)F_n(t)\|_{C^0(I;X)} \leqq C\|f\|_{B^0_{\infty,1}(I;X)},$$

ここで，C は f と n に依存しない定数である．そして，

$n\to\infty$ のとき $F_n(t)\to F(t)$，$A_n(t)F_n(t)\to A(t)F(t)$，

が I の任意の点 t で成り立つ．

証明．(13) は補題3と注意および

$$\sup_n \sup_{t\in I} \sup_{0<s\leqq b-a} \|(sA_n(t))^j e^{-sA_n(t)}\|_{\mathscr{L}(X)} < \infty,\ j=0,1,2,$$

から分かる．$n\to\infty$ のとき $e^{-sA_n(t)}\to e^{-sA(t)}$（強収束）だから $F_n(t)\to F(t)$．

$f\in C^1(I;X)$ とし，$f'=df/dt$ と書くと，(6) より，

$$A_n(t)F_n(t)=f(t)-e^{-(t-a)A_n(t)}f(a)-\int_a^t e^{-(t-s)A_n(t)}f'(s)ds$$

$$\to f(t)-e^{-(t-a)A(t)}f(a)-\int_a^t e^{-(t-s)A(t)}f'(s)ds$$

$$=A(t)F(t).$$

f が (7) の形の函数のときは (8) で f_ε を定めると，(12) と注意により，

$$\|A_n(t)F_{\varepsilon,n}(t) - A_n(t)F_n(t)\|_X \leqq C'\int_0^\varepsilon \|u(\tau,\cdot)\|_{L_\infty(I;X)}\frac{d\tau}{\tau}$$

$n = 1,2,\cdots,$ を得る．ここで，C' は n によらない定数，F_ε は (9) の函数で，

$$F_{\varepsilon,n}(t) = \int_a^t e^{-(t-s)A_n(t)} f_\varepsilon(s)ds$$

である．$f_\varepsilon \in C^1(I;X)$ だから，$A_n(t)F_{\varepsilon,n}(t) \to A(t)F_\varepsilon(t)$．従って，$A_n(t)F_n(t) \to A(t)F(t)$. 証明終．

定理4の証明． $a < c < t$ のとき，

$$F(t) = \int_c^t U(t,s)f(s)ds + U(t,c)\int_a^c U(c,s)f(s)ds$$

分けると，第2項が微分可能で $A(t)$ の定義域に属することは明かであるから，区間の長さが小のときに定理が成り立つことをいえば十分である．以下，$b-a$ は小とする．

$n = 1, 2, \cdots$ について $A_n(t) = A(t)(1+n^{-1}A(t))^{-1}$ に対する発展作用素を $\{U_n(t,s)\}$ とし，(1) で U を U_n で置き換えて定義した函数を F_n とする．U_n はノルム収束の位相で連続的微分可能であるから F_n について

$$\frac{d}{dt}F_n(t) = f(t) - A_n(t)F_n(t)$$

が成立する．$e^{-(t-s)A_n(t)}F_n(s)$ を s で微分し，a から t まで

積分し，$A_n(t)$を作用すると，

$$A_n(t)F_n(t) = A_n(t)g_n(t) + \int_a^t K_n(t,s)A_n(s)F_n(s)ds$$

を得る．ただし，

$$(14) \qquad K_n(t,s) = A_n(t)e^{-(t-s)A_n(t)}\{A_n(t) - A_n(s)\}A_n(s)^{-1},$$

$$g_n(t) = \int_a^t e^{-(t-s)A_n(t)} f(s)ds,$$

である．そこで

$$(15) \qquad K(t,s) = A(t)e^{-(t-s)A(t)}\{A(t) - A(s)\}A(s)^{-1},$$

$$g(t) = \int_a^t e^{-(t-s)A(t)} f(s)ds,$$

とおくと，K_nとKは定理3の証明のときと同じ性質を持ち，補題1の系により

$n \to \infty$ のとき各点 t で $A_n(t)g_n(t) \to A(t)g(t)$

で，極限函数$A(t)g(t)$は一様連続である．積分方程式

$$(16) \qquad H(t) = A(t)g(t) + \int_a^t K(t,s)H(s)ds$$

の$C^0(I;X)$に属する解を$H(t)$とすると，定理3の証明と同様にして，各点tで

$n \to \infty$のとき $A(t)(1+n^{-1}A(t))^{-1}F_n(t) = A_n(t)F_n(t) \to H(t)$

である．また，$U_n(t,s)$は$U(t,s)$に強収束し，一様に有界で

あるから，$n \to \infty$ のとき $F_n(t)$ は $F(t)$ に収束する．故に，$F(t)$ は $\mathcal{D}(A(t))$ に属し，$A(t)F(t) = H(t)$ である．これから定理の結論がでることは一般的な命題：

“F_n，F が連続で，F_n が連続的微分可能で導函数が一様に有界で，各点で連続函数 H に収束すれば，F も微分可能でその導函数は H である．”

により分かる．　証明終．

§5．非斉次線型放物型方程式の強微分可能な解

定理4を使うと定理1から定理2を導いたと同様にして，方程式の右辺が0次のBesov空間に属する場合について標記の解の存在が証明できる．すなわち，

定理5．$\{A(t)\}_{a \leq t \leq b}$ を定理3の条件を満たす生成作用素の系，$\{U(t,s)\}_{a \leq s \leq t \leq b}$ をそれに対する発展作用素とし，f が $\overset{0}{B}_{\infty,1}((a,b);X)_{loc} \cap L_1((a,b);X)$ に属すると，初期条件

(1)
$$u(a) = u_0$$

を満たし，閉区間 $[a, b]$ で連続で，開区間 (a, b) で強連続的微分可能で，非斉次方程式

(2)
$$\frac{du}{dt} + A(t)u(t) = f(t), \quad a < t < b,$$

を満たす解は

(3) $$u(t) = U(t,a)u_0 + \int_a^t U(t,s)f(s)ds$$
で与えられる．

§6．半線型方程式への応用．その1．

線型方程式に関する結果（定理2）に対応して，半線型方程式に関する初期値問題の理論を精密化できる：

定理6．（島田道昭）$-A$ はBanach空間 X における解析的半群の生成作用素，Y は X に連続的に埋め込まるBanach空間とし，次の条件を仮定する：

(i) ある $0<\alpha<1$ と正の定数 C があって，t の 0 の近傍において

(1) $$\|e^{-tA}\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leqq Ct^{\alpha-1}.$$

(ii) e^{-tA} は Y における C_0 半群である．

(iii) f は $R\times Y$ の開集合 U で定義され，連続で，

(a) 任意の点 $(t_0,x_0)\in U$ に対して，(t_0,x_0) の近傍 $V=(t_0-\delta, t_0+\delta)\times V'$ と正の定数 L があって，V の任意の点 (t,x_1) と (t,x_2) に対して，

(2) $$\|f(t,x_1)-f(t,x_2)\|_X \leqq L\|x_1-x_2\|_Y.$$

(b) 区間 $(t_0-\delta,\ t_0+\delta)$ 内に台を持つ任意の C^∞ 函数 ϕ に対して，$\phi(t)f(t,x)$ は $x\in V'$ について定義1の意味で一様に $\overset{0}{B}_{\infty,1}(R;X)$ に属する．

このとき，任意の(t_0, x_0)に対して，(t_0, x_0)に依存する$t_1 > t_0$があって，初期値問題

$$(3) \qquad \frac{du}{dt} + Au(t) = f(t,u(t)),$$

$$(4) \qquad u(t_0) = x_0,$$

の区間(t_0,t_1)における一意的解が存在する．

証明．$(t_0, x_0) \in U$に対して近傍 $V = (t_0-\delta, t_0+\delta)\times V'$, $V' = \{x; \|x-x_0\|_X \leqq 2\beta\}$，を定理の条件の(a)と(b)を満たすようにとる．e^{-tA}はYのC_0半群であるから

$$0 \leqq t \leqq \delta' \text{のとき} \quad \|e^{-tA}x_0 - x_0\|_Y \leqq \beta$$

が成立するように正数δ'をとることができる．そして

$$\gamma = \sup\{\|f(t,x_0)\|_X ; t_0 \leqq t \leqq t_0+\min\{\delta, \delta'\}\}$$

$$\delta_1 = \min\{\delta, \delta', [\alpha\beta(2\beta L+\gamma)^{-1}C^{-1}]^{1/\alpha}\}, \quad t_1 = t_0+\delta_1$$

とおく．空間 $\mathscr{Y} = C^0([t_0, t_1]; Y)$の変換$\mathscr{T}$を

$$\mathscr{T}u(t) = e^{-(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-(t-s)A}f(s,u(s))ds$$

とすると，$\mathscr{S} = \{u(t) \in \mathscr{Y}; u(t_0) = x_0, \|u(t)-x_0\|_Y \leqq 2\beta\}$の元uに対して，$t_0 \leqq s \leqq t \leqq t_1$において

$$\|e^{-(t-s)A}f(s,u(s))\|_Y \leqq C(t-s)^{\alpha-1}\|f(s,u(s))\|_X$$

$$\leqq C(t-s)^{\alpha-1}\|\{f(s,u(s))-f(s,x_0)\}\|_X + C(t-s)^{\alpha-1}\|f(s,x_0)\|_X$$

$$\leqq C\{2\beta L+\gamma\}(t-s)^{\alpha-1}$$

であるから，$\|\mathcal{T}u(t)-x_0\|_Y$ は

$$\|e^{-(t-t_0)A}x_0-x_0\|_Y+\int_{t_0}^{t}\|e^{-(t-s)A}f(s,u(s))\|_Y ds$$
$$\leqq \beta + C(2\beta L+\gamma)\alpha^{-1}\delta_1{}^{\alpha}\leqq 2\beta$$

と評価され，従って，$\mathcal{T}$ は $\mathcal{S}$ を $\mathcal{S}$ に写す．同様にして，

$$\|\mathcal{T}u(t)-\mathcal{T}v(t)\|_Y\leqq\int_{t_0}^{t}\|e^{-(t-s)A}\{f(s,u(s))-f(s,v(s))\|_Y ds$$
$$\leqq CL\alpha^{-1}\delta_1{}^{\alpha}\|u-v\|_{\mathcal{S}}\leqq 2^{-1}\|u-v\|_{\mathcal{S}}.$$

故に，$\mathcal{T}$ は縮小写像で，不動点 $u=\mathcal{T}u\in\mathcal{S}$ を持つ．次の補題２により右辺はＹ値のHölder連続函数であるから，$\phi\in\mathcal{K}_1([t_0,\ t_1])$ とすると

$$\left\|\int\frac{1}{\tau}\phi(t,\frac{t-s}{\tau})\{f(s,u(s))-f(s,u(t))\}ds\right\|_X$$
$$\leqq LC_1\tau^{\alpha}\int_{|t-s|\leqq\gamma}|t-s|^{\alpha}ds\ \in L_1^*((0,\ c))$$

であり，一方，仮定により

$$\sup_{x\in V}\left\|\int\frac{1}{\tau}\phi(t,\frac{t-s}{\tau})\,f(s,x)ds\right\|_X\ \in L_1^*((0,\ c);L_\infty([t_0,\ t_1]))$$

である．故に，$f(t,u(t))$ は $\overset{0}{B}_{\infty,1}([t_0,\ t_1];X)$ に属し，定理１により u が微分可能で（1）を満たすことが分かる．証明終．

補題２． $-A$ がBanach空間Ｘの解析的半群の生成作用素で，e^{-tA} がＸに連続的に埋め込まれているBanach空間Ｙの C_0 半群になり，（1）が成立するならば，$t>0$ のとき $\|Ae^{-tA}\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\leqq C't^{\alpha-2}$ が成立し，任意の $x\in X$ について $e^{-tA}x$ はＹの位相で微分可能で導函数は $-Ae^{-tA}x$ に等しい，

そして，$g \in C^0([a,b];X)$ に対して $G(t)=\int_a^t e^{-(t-s)A}g(s)ds$ はこの区間上のY値Hölder連続函数である．

証明．前半は $Ae^{-tA}=e^{-(t/2)A}Ae^{-(t/2)A}$ とYのノルムで

$$h^{-1}\{e^{-(t+h)A}x - e^{-tA}x\} - Ae^{-tA}x$$
$$= h^{-1}\int_t^{t+h}[e^{-(s-t)A}-1]Ae^{-tA}x\,ds \to 0$$

であることによる．また，$\|G(t+h)-G(t)\|_Y$ は

$$\int_0^h dr\int_{t_0}^t \|Ae^{-(t+r-s)A}g(s)\|_Y ds + \int_t^{t+h}\|e^{-(t+h-s)A}g(s)\|_Y ds$$
$$\leqq \left\{\frac{C'}{\alpha(1-\alpha)}+\frac{C}{\alpha}\right\} h^\alpha \sup_{a\leqq s\leqq b}\|g(s)\|_X \text{ 以下．}$$

定理の条件を満たす空間Yの例としては分数ベキの定義域 $\mathscr{D}(A^\alpha)$ および Komats[1] の空間 $D_p^{1-\alpha}(A)$ がある．

この定理を具体的な偏微分方程式に応用した例を示そう．

C^2 級の境界 $\partial\Omega$ を持つ $\mathbb{R}^3$ の有界領域 Ω において半線型方程式

$$(5)\quad \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \Delta u(t,x) + \sum_{j=1}^{3} u(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_j} + g(t,x), \quad t>a,\ x\in\Omega \text{ のとき，}$$

$$(6)\quad u(t,x)=0, \quad t>a,\ x\in\partial\Omega \text{ のとき，}$$

$$(7)\quad u(a,x)=u_0(x), \quad x\in\Omega \text{ のとき，}$$

を考える．ただし，Δ はラプラシアンを示し，この§の終まで x, y は $\mathbb{R}^3$ の点を表わす．

$X = L_2(\Omega)$，作用素 A を $\mathcal{D}(A) = W_2(\Omega) \cap W_{2,0}(\Omega)$，$Au = -\Delta u$ によって定義する．定理6を使って，次の結果を得る：

定理7．（島田道昭）$g(t,x)$ を $X = L_2(\Omega)$ の値をとる函数と見て $g(t)$ とかく．

$g(t) \in \overset{0}{B}_{\infty,1}((a,\infty);X)_{loc}$ かつ，$t \to a$ のとき $g(t)$ が有界ならば，任意の $u_0 \in D^{3/4}(A)$ に対して半線型方程式（5）～（7）は大域的な解 $u \in C^1((a,\infty);X) \cap C^0((a,\infty);\mathcal{D}(A))$ を持つ．

注意．初期値の空間として分数冪の定義域 $\mathcal{D}(A^\alpha)$ を使うと，解の存在を示すのには $\alpha > 3/4$ と仮定しなければならない．

§7．半線型方程式への応用．その2．

前節と同様に，線型方程式に関する定理5を半線型方程式

(1) $$\frac{du}{dt} + A(t)u(t) = f(t,u(t)),$$

(2) $$u(t_0) = x_0,$$

に応用することができる．すなわち，

定理8． $\{A(t)\}_{a \le t \le b}$ を定理3の条件を満たす解析的半群の生成作用素の系とし，$\{U(t,s)\}$ をそれに対する発展作用素とする．Y を X に連続的に埋め込まれたBanach空間とし，次の条件を仮定する：

(i) ある $0 < \alpha < 1$ と正の定数 C があって，t の0の近傍

において

(3) $$\|e^{-tA(s)}\|_{\mathfrak{L}(X,Y)} \leqq Ct^{\alpha-1}.$$

(ii) $U(t,s)$ は Y の有界作用素で，$\|U(t,s)\| \leqq C_1$．

(iii) $U(t,s)$ は $t \to s+0$ のとき恒等作用素に Y において強収束する．

(iv) $A(t)(\lambda_0+A(t_0))^{-1}$ は Y の有界作用素でそのノルムは一様有界である．

(v) f は $R\times Y$ の開集合 U で定義され，U で連続であって，定理６（iii）の条件を満たす．

このとき，任意の $(t_0, x_0) \in U$ に対して，初期値問題（1）～（2）は区間（t_0,t_1）においてただ一つの解を持つ．ただし，t_1 は (t_0, x_0) に依存する．

証明の方針は定理６とほぼ同じであるが，次の補題が必要になる．

補題３． $\{A(t)\}$，$\{U(t,s)\}$ と Y を定理８と同じとする．このとき，δ を十分小にとると，

(i) $s \leqq t \leqq s+\delta$ において

(4) $$\|U(t,s)\|_{\mathfrak{L}(X,Y)} \leqq C|t-s|^{\alpha-1}.$$

(ii) $s \leqq t \leqq s+\delta$，$h>0$ について，

(5) $$\|U(t+h,s)-U(t,s)\|_{\mathfrak{L}(X,Y)} \leqq Ch^{\mu}|t-s|^{\alpha-\mu-1},$$

ただし，μ は $0<\mu<\alpha$ を満たす任意の定数である．

参　考　文　献

J. B. Baillon[1]; Caractère borné de certains générateurs de semigroupes linéaires dans les espaces de Banach, C. R. Acad. Sc. Paris, 290(1980),757-760.

M. G. Crandall and A. Pazy[1]; On the differentiability of weak solutions of a differential equation in Banach spaces, J. Math. Mech., 18(1969),1007-1016.

H. Komatsu[1]; Fractional powers of operators , I, Pacific J. Math., 19(1966), 285-346; II, Pacific J. Math., 21(1967),89-111; VI, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo IA 19(1972),1-63.

増田久弥[1]；発展方程式，１９７５，紀伊国屋書店.

T. Muaramatu[1]; On Besov spaes and Sobolev spaces of generalized functions defined in a general region, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 9(1974),325-396.

村松寿延[2]；補間空間と線型作用素，１９８５，紀伊国屋書店.

T. Muramatu[3]; Besov spaces and analytic semi-groups of linear operators, in preparation.

A. Pazy[1]; Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, 1983, Springer-Verlag.

M. Shimada[1]; Existence of strong solusions of parabolic equations in a Banach spaces, in preparation.

H. Tanabe[1]; On the equations of evolution in a Banach space, Osaka J. Math., 12(1960),365-613.

田辺広城[2]；発展方程式，１９７５，岩波書店.